

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 184

Nouvelle série

**GLOBAL NONLINEAR
STABILITY
OF MINKOWSKI SPACE
FOR SPACELIKE-CHARACTERISTIC
INITIAL DATA**

O. GRAF

2 0 2 5

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Boris ADAMCZEWSKI
François CHARLES
Gabriel DOSPINESCU
Béatrice de TILLIÈRE
Clotilde FERMANIAN

Dorothee FREY
Youness LAMZOURI
Wendy LOWEN
Ludovic RIFFORD

François DAHMANI (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 72 € (\$ 108)

Abonnement électronique : 128 € (\$ 192)

Abonnement avec supplément papier : 220 €, hors Europe : 265 € (\$ 397)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`memoires@smf.emath.fr` • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-37905-207-1

doi:10.24033/msmf.491

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

**GLOBAL NONLINEAR STABILITY
OF MINKOWSKI SPACE
FOR SPACELIKE-CHARACTERISTIC
INITIAL DATA**

Olivier Graf

O. Graf

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IF, 38000 Grenoble, France.

Soumis le 8 février 2021 ; révisé le 25 octobre 2022 ; accepté le 21 mars 2023.

2000 Mathematics Subject Classification. – 83C05, 35L05.

Key words and phrases. – Einstein vacuum equations, general relativity, asymptotic stability, Minkowski space, lightcones, maximal hypersurfaces, harmonic coordinates.

Mots clefs. – Équations d'Einstein dans le vide, relativité générale, stabilité asymptotique, espace de Minkowski, cônes de lumière, hypersurfaces maximales, coordonnées harmoniques.

GLOBAL NONLINEAR STABILITY OF MINKOWSKI SPACE FOR SPACELIKE-CHARACTERISTIC INITIAL DATA

Olivier Graf

Abstract. – In this paper, we prove the global nonlinear stability of Minkowski space in the context of the spacelike-characteristic Cauchy problem for Einstein vacuum equations. Spacelike-characteristic initial data are posed on a compact 3-disk and on the future complete null hypersurface emanating from its boundary. Our result extends the seminal stability result for Minkowski space proved by Christodoulou and Klainerman for which initial data are prescribed on a spacelike 3-plane.

The proof relies on the classical vectorfield method and bootstrapping argument from Christodoulou-Klainerman. The main novelty is the introduction and control of new geometric constructions adapted to the spacelike-characteristic setting. In particular, it features null cones with prescribed vertices, spacelike maximal hypersurfaces with prescribed boundaries and global harmonic coordinates on Riemannian 3-disks.

Résumé (Stabilité globale non-linéaire de l'espace de Minkowski pour des données initiales spatiales-caractéristiques)

Dans cet article nous prouvons la stabilité globale non-linéaire de l'espace de Minkowski dans le cadre du problème de Cauchy spatial-caractéristique pour les équations d'Einstein dans le vide. Les données initiales spatiales-caractéristiques sont posées sur un 3-disque et sur l'hypersurface nulle et complète dans le futur qui émane du bord de ce disque. Notre résultat étend le résultat originel prouvé par Christodoulou et Klainerman pour lequel les données initiales sont prescrites sur un hyperplan spatial.

La preuve repose sur la méthode des champs de vecteurs et sur l'argument de bootstrap introduit dans Christodoulou-Klainerman. La principale nouveauté est l'introduction et le contrôle de nouvelles constructions géométriques adaptées au cadre spatial-caractéristique. En particulier, on utilise des cônes de lumière à sommets prescrits, des hypersurfaces spatiales maximales à bords prescrits et des coordonnées harmoniques globales sur des 3-disques riemanniens.

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1. Einstein equations and the stability of Minkowski space	1
1.2. The <i>global nonlinear stability of Minkowski space</i>	4
1.3. Main theorem	7
1.4. Overview of the proof of Theorem 1.8	9
1.4.1. Geometric setup of the bootstrap region $\mathcal{M}_{\underline{u}^*}$	10
1.4.2. Global energy estimates	12
1.4.3. Curvature, connection and metric control	17
1.4.4. Approximate conformal Killing vectorfields	17
1.5. Comparison to previous works	19
1.6. Organization of the paper	21
1.7. Acknowledgements	21
2. Definitions & formulas	23
2.1. The bootstrap region $\mathcal{M}_{\underline{u}^*}$	23
2.2. Maximal hypersurfaces Σ_t^{int} of $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	27
2.2.1. Fundamental forms	27
2.2.2. Electric-magnetic decompositions	27
2.3. Null decompositions	28
2.4. Transition relations on the boundary $\mathcal{T}$	31
2.5. Uniformization of the sphere S^* and harmonic Cartesian coordinates on Σ_{t^*}	33
2.6. Approximate interior Killing fields $\mathbf{T}^{\text{int}}, \mathbf{S}^{\text{int}}, \mathbf{K}^{\text{int}}$ and $\mathbf{O}^{\text{int}}$ in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	33
2.7. Exterior hypersurfaces Σ_t^{ext} of $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	34
2.8. Commutation relations for integrals and averages on $S_{u, \underline{u}}$	35
2.9. Null decomposition of the geodesic-null foliation in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	36
2.9.1. Averages and renormalizations	37
2.9.2. The null coefficient ζ and renormalizations	39
2.9.3. The null coefficient $\underline{\omega}$ and renormalizations	43
2.10. Null decomposition of the canonical foliation in $\underline{\mathcal{C}}^*$	44
2.10.1. Averages and renormalizations	44
2.11. Approximate exterior Killing vectorfields $\mathbf{T}^{\text{ext}}, \mathbf{S}^{\text{ext}}, \mathbf{K}^{\text{ext}}$	46
2.12. Approximate exterior Killing rotations $\mathbf{O}^{\text{ext}}$	46
2.12.1. Approximate exterior Killing rotations on $\underline{\mathcal{C}}^*$	46
2.12.2. Approximate exterior Killing rotations in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	49
2.13. The last cones geodesic foliation	54

2.14. The initial layers $\mathcal{L}_{\text{bot}}$ and $\mathcal{L}_{\text{con}}$	55
2.15. General change of null frames	56
3. Norms, bootstrap assumptions and consequences	61
3.1. Preliminary definitions	61
3.2. Norms	62
3.2.1. Norms for the curvature in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$ and $\underline{\mathcal{C}}^*$	62
3.2.2. Norms for the curvature in $\mathcal{M}^{\text{int}}$	64
3.2.3. Norms for the null connection coefficients on the cone $\underline{\mathcal{C}}^*$	65
3.2.4. Norms for the null connection coefficients in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	66
3.2.5. Norms for the maximal connection coefficients in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	67
3.2.6. Norms for the approximate Killing fields in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	68
3.3. The Bootstrap Assumptions	69
3.3.1. The constants used in this paper	69
3.3.2. Mild bootstrap assumptions	69
3.3.3. Strong bootstrap assumptions	70
3.3.4. First consequences of the Bootstrap Assumptions	74
4. Main results	79
4.1. Initial layers ε -close to Minkowski space	79
4.2. Main theorem	81
4.3. Auxiliary theorems	84
4.3.1. Global harmonic coordinates	84
4.3.2. Axis limits	86
4.3.3. Well-posedness of the canonical foliation	88
4.3.4. Existence and control of initial layers	89
4.4. Proof of the main theorem	89
4.4.1. Improvement of the Bootstrap Assumptions	90
4.4.2. Extension of $\mathcal{M}_{\underline{u}^*}$	91
4.4.3. Conclusions	94
5. Global energy estimates in $\mathcal{M}$	97
5.1. Estimates for the interface error terms $\mathcal{E}^T$	100
5.1.1. The mean value argument	100
5.1.2. Control of $\mathcal{E}_1^T$ and $\mathcal{E}_2^T$	102
5.2. Estimates for the interior error terms $\mathcal{E}^{\text{int}}$	105
5.2.1. Estimates for $\mathcal{E}_1^{\text{int}}$	105
5.2.2. Estimates for $\mathcal{E}_2^{\text{int}}$	106
5.3. Estimates for the exterior error terms $\mathcal{E}^{\text{ext}}$	108
5.3.1. Preliminary definitions and computational results	108
5.3.2. Preliminary sup-norm estimates for the deformation tensors π	110
5.3.3. Estimates for $\mathcal{E}_{1,1}^{\text{ext}}, \mathcal{E}_{2,1}^{\text{ext}}$	112
5.3.4. Preliminary $L^\infty L^4(S)$ estimates for $\mathbf{D}\pi$	114
5.3.5. Estimates for $\mathcal{E}_{1,2}^{\text{ext}}$	115
5.3.6. Preliminary $L^2(\mathcal{M}^{\text{ext}})$ estimates for $\mathbf{D}^2\pi$	120
5.3.7. Estimates for $\mathcal{E}_{2,2}^{\text{ext}}$	122
5.3.8. Proof of Lemma 5.14	124

6. Null curvature estimates in $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{M}^{\text{ext}}$ and $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	127
6.1. Proof of the L^2 bounds (6.2a) and (6.2b) on $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{M}^{\text{ext}}$ and $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	131
6.2. Proof of the $L^\infty \tilde{H}^{1/2}$ estimates (6.2c) and (6.2d)	132
6.3. Proof of Proposition 6.3	134
6.3.1. Control of $\mathcal{R}_{\leq 1}(u, \underline{u})$ and $\mathcal{R}_{\leq 1}(u, \underline{u})$	134
6.3.2. Error term estimates from Section 6.3.1	137
6.3.3. Control of $\mathcal{R}_{\leq 2}(u, \underline{u})$ and $\mathcal{R}_{\leq 2}(u, \underline{u})$	139
7. Maximal curvature estimates in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	143
7.1. Preliminary results	144
7.2. Control of $\mathcal{R}_{\leq 1}^{\text{int}}$	145
7.3. Control of $\mathcal{R}_2^{\text{int}}$	147
8. Remaining curvature estimates	151
8.1. Null curvature estimates on $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{M}^{\text{int}}$	151
8.1.1. r^* -rescaling, extension and local existence from Σ_{t^*}	152
8.1.2. Energy estimates in $\mathcal{M}_{\text{top}}^{\text{int}}$	153
8.1.3. Proof of the decay estimate (8.3)	156
8.2. Curvature estimates for all transition parameters	156
8.2.1. Proof of Lemma 8.7	158
8.2.2. Proof of Lemma 8.8	160
8.2.3. Proof of Lemma 8.9	161
9. Null connection estimates on $\mathcal{C}^*$	163
9.1. Hardy estimates	164
9.2. Klainerman-Sobolev estimates	167
9.3. Control of $\bar{\rho}$ and $\bar{\sigma}$	167
9.4. Control of $\overline{\text{tr}\chi} + \frac{2}{r}$	169
9.5. Control of $\overline{\text{tr}\chi} - \frac{2}{r}$	170
9.6. Control of ζ	170
9.7. Control of $\underline{\omega} - \underline{\bar{\omega}}$	172
9.8. Control of $\text{tr}\chi - \overline{\text{tr}\chi}$	173
9.9. Control of $\hat{\chi}$	173
9.10. Control of $\text{tr}\chi - \overline{\text{tr}\chi}$	174
9.11. Control of $\hat{\chi}$	174
9.12. Uniformization of S^*	175
9.13. Control of the rotation vectorfields $\mathbf{O}^{\text{ext}}$ on S^*	175
9.14. Control of $\mathbf{O}^{\text{ext}}$ on $\mathcal{C}^* \cap \mathcal{M}^{\text{ext}}$	178
9.14.1. Mild control of $\mathbf{O}^{\text{ext}}$	178
9.14.2. Control of M	180
9.14.3. Control of Ψ	181
9.15. Control of the area radius	181
9.16. Control of spherical coordinates on $\mathcal{C}^*$	182
10. Null connection estimates in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	183
10.1. Evolution estimates	184
10.2. Control of $\bar{\rho}$ and $\bar{\sigma}$	185

10.3. Control of $\overline{\omega}$	187
10.4. Control of $\overline{\text{tr}\chi} - \frac{2}{r}$	188
10.5. Control of $\overline{\text{tr}\chi} + \frac{2}{r}$	188
10.6. Control of $\text{tr}\chi - \overline{\text{tr}\chi}$	189
10.7. Control of ζ	190
10.7.1. Control of $\mu - \overline{\mu}$ and $\nabla^{\leq 1}\zeta$	190
10.7.2. Control of $\iota, \underline{\omega}_\rho, \underline{\omega}_\sigma$	191
10.7.3. Control of ς and $\nabla_3\zeta$	193
10.8. Control of $\hat{\chi}$	195
10.9. Control of $\text{tr}\chi - \overline{\text{tr}\chi}$ and $\hat{\chi}$	195
10.10. Control of $\underline{\omega} - \overline{\omega}$	196
10.10.1. Control of $\underline{\omega} - \overline{\omega}$	196
10.10.2. Control of $\underline{\iota}$ and $\nabla(\underline{\omega}, *\underline{\omega})$	196
10.11. Control of ξ	196
10.12. Control of η	197
10.12.1. Control of $\overline{\eta}$	197
10.12.2. Control of $\nabla\eta$	198
10.13. Control of $\mathbf{O}^{\text{ext}}$	199
10.13.1. Mild control of $\mathbf{O}^{\text{ext}}$	199
10.13.2. Control of M and Ψ	199
10.13.3. Control of Y	201
10.14. Control of the area radius	202
10.15. Control of the spherical coordinates in $\mathcal{M}^{\text{ext}}$	202
11. Maximal connection estimates in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$	205
11.1. Elliptic estimates	206
11.2. Control of the second fundamental form k and lapse n	206
11.2.1. Control of $k, \nabla k$ on Σ_t	206
11.2.2. Control of $\nabla^2 k$ on Σ_t	207
11.2.3. Optimal control for $\nabla^3 k$ on the last hypersurface Σ_{t^*}	208
11.2.4. Control of $\nabla^{\leq 3} n$ on Σ_t	208
11.2.5. Control of $\hat{\mathcal{L}}_{\overline{T}} k, \nabla \hat{\mathcal{L}}_{\overline{T}} k$ on Σ_t	209
11.2.6. Control of $\nabla^{\leq 2}(\overline{T}(n))$ on Σ_t	209
11.2.7. Control of $\hat{\mathcal{L}}_{\overline{T}}^2 k$ on Σ_t	210
11.2.8. Control of $\nabla^{\leq 1} \overline{T}^2(n)$ on Σ_t	210
11.2.9. Control of $\mathbf{DT}^{\text{int}}$	211
11.3. Control of the harmonic Cartesian coordinates on Σ_{t^*}	212
11.4. Control of the interior Killing fields $\mathbf{T}^{\text{int}}, \mathbf{S}^{\text{int}}, \mathbf{K}^{\text{int}}$ and $\mathbf{O}^{\text{int}}$ in $\mathcal{M}_{\text{bot}}^{\text{int}}$..	212
11.4.1. Control of $\mathbf{DX}^{\text{int}}, \mathbf{DS}^{\text{int}}, \mathbf{DK}^{\text{int}}$ and $\mathbf{DO}^{\text{int}}$	212
11.4.2. Control of $\mathbf{X}^{\text{int}}$	216
11.4.3. Mild control of $\mathbf{X}^{\text{int}}, \mathbf{S}^{\text{int}}, \mathbf{K}^{\text{int}}$ and $\mathbf{O}^{\text{int}}$	220
11.5. Control of the Killing fields at the interface $\mathcal{I}$	222
12. The initial layers	229
12.1. Initial bounds for energy fluxes through $\mathcal{C}_1$ and Σ_{t°	229
12.1.1. Energy fluxes through Σ_{t°	230

12.1.2. Energy fluxes through $\mathcal{C}_1$	231
12.2. Control of the last cones geodesic foliation	233
12.3. Proof of Lemma 12.6	234
12.4. Control of transition coefficients and comparison of foliations	241
12.4.1. Last cones geodesic foliation comparisons	243
12.4.2. Conical initial layer comparisons	255
12.4.3. Bottom initial layer comparisons	259
A. Global harmonic coordinates	261
A.0.1. Definitions and identities on $\partial\Sigma$	261
A.0.2. Uniformization theorem on $\partial\Sigma$	262
A.0.3. Definitions and identities on Σ	262
A.1. A refined Bochner identity	263
A.2. Refined Bochner estimate	268
A.3. Higher order estimates	271
A.4. The x^i are local coordinates on Σ	273
A.5. The x^i are global coordinates from Σ onto $\mathbb{D}$	274
B. Axis limits	277
B.1. Optical normal coordinates	277
B.2. Axis limits for the metric $\mathbf{g}$ in optical normal coordinates	281
B.3. Axis limits for the null connection coefficients	284
C. The canonical foliation	289
C.1. The system of transport-elliptic equations	289
C.2. The Banach-Picard iteration	292
C.3. Conclusion: convergence and regularity	298
C.4. Proof of Proposition C.6	298
D. Klainerman-Sobolev estimates	303
Bibliography	307